III. *Epistola* missa ad *prænobilem virum D.*Carolum Mountague *Armigerum*, *Scaccarii Regii apud Anglos Cancellarium, & Societatis Regiæ Præsidem, in qua solvuntur duo problemata Mathematica à Johanne Barnoullo Mathematico celeberrimo proposita.*

Jan. 30. 169$\frac{6}{7}$.

ACcepi, Vir amplissime, hesterno die duo Problematum à *Joanne Bernoullo* Mathematicorum acutissimo propositorum exemplaria, Groningæ edita in hæc verba.

Acutissimis qui toto Orbe florent Mathematicis, *S. P. D.* *Joannes Bernoulli* Math. P. P.

Cum compertum habeamus vix quicquam esse quod magis excitet generosa ingenia ad moliendum quod conducit augendis scientiis, quàm difficilium pariter & utilium quæstionum propositionem, quarum enodatione tanquam singulari si qua aliâ via ad nominis claritatem perveniant sibique apud posteritatem æterna extruant monumenta; Sic me nihil gratius Orbi Mathematico facturum speravi quam si imitando exemplum tantorum Virorum Mersenni, Pascalii, Fermatii, præsertim recentis illius Anonymi Ænigmatistæ Florentini aliorumque qui idem ante me fecerunt, præstantissimis hujus ævi Analystis proponerem aliquod problema, quo quasi Lapide Lydio suas methodos examinare, vires intendere & si quid invenirent nobiscum communicare possent, ut quisque

quisque suas exinde promeritas laudes à nobis publicè id profitentibus consequeretur.

Factum autem illud est ante semestre in Actis Lipſ. m. Jun. pag. 269. Ubi tale problema proposui cujus utilitatem cum jucunditate conjunctam videbunt omnes qui cum successu ei se applicabunt. Sex mensium spatium à prima publicationis die Geometris concessum est, intra quod si nulla solutio prodiret in lucem, me meam exhibiturum promisi: Sed ecce elapsus est terminus & nihil solutionis comparuit; nisi quod Celeb. Leibnitius de profundiore Geometriâ præclarè meritus me per literas certiorem fecerit, se jam feliciter dissolvisse nodum pulcherrimi hujus uti vocabat & inauditi antea problematis, insimulque humaniter rogavit, ut præstitutum limitem ad proximum pascha extendi paterer, quo interea apud Gallos Italosque idem illud publicari posset nullusque adeo superesset locus ulli de angustiâ termini quærelæ; Quam honestam petitionem non solum indulsi, sed ipse hanc prorogationem promulgare decrevi, visurus num qui sint qui nobilem hanc & arduam quæstionem aggressuri, post longum temporis intervallum tandem Enodationis compotes fierent. Illorum interim in gratiam ad quorum manus Acta Lipsiensia non perveniunt, propositionem hîc repeto.

Problema Mechanico-Geometricum de Linea Celerrimi descensûs.

Determinare lineam curvam data duo puncta in diversis ab horizonte distantiis & non in eadem rectâ verticali posita connectentem, super qua mobile propriâ gravitate decurrens & à superiori puncto moveri incipiens citissime descendat ad punctum inferius.

Senſus problematis hic eſt, ex infinitis lineis quæ duo illa data puncta conjungunt, vel ab uno ad alterum duci poſſunt eligatur illa, juxta quam ſi incurvetur lamina tubi canaliſve formam habens, ut ipſi impoſitus globulus & liberè dimiſſus iter ſuum ab uno puncto ad alterum emetiatur tempore breviſſimo.

Ut vero omnem ambiguitatis anſam precaveamus, ſcire B. L. volumus, nos hîc admittere Galilæi hypotheſin de cujus veritate ſepoſitâ reſiſtentia jam nemo eſt ſaniorum Geometrarum qui ambigat, *Velocitates ſcilicet acquiſitas gravium cadentium eſſe in ſubduplicata ratione altitudinum emenſarum*, quanquam aliàs noſtra ſolvendi methodus univerſaliter ad quamvis aliam hypotheſin ſeſe extendat.

Cum itaque nihil obſcuritatis ſuperſit, obnixè rogamus omnes & ſingulos hujus ævi Geometras, accingant ſe promtè, tentent, diſcutiant quicquid in extremo ſuarum methodorum receſſu abſconditum tenent; Rapiat qui poteſt præmium quod Solutori paravimus, non quidem auri non argenti ſummam quo abjecta tantum & mercenaria conducuntur ingenia, à quibus ut nihil laudabile ſic nihil quod ſcientiis fructuoſum expectamus, ſed cùm virtus ſibi ipſi ſit merces pulcherrima, atque gloria immenſum habeat calcar, offerimus præmium quale convenit ingenui ſanguinis Viro, conſertum ex honore, laude & plauſu, quibus magni noſtri Apollinis perſpicacitatem publicè & privatim, ſcriptis & dictis coronabimus, condecorabimus & celebrabimus.

Quod ſi verò feſtum paſchatis præterierit nemine deprehenſo qui quæſitum noſtrum ſolverit, nos quæ ipſi invenimus publico non invidebimus; Incomparabilis enim Leibnitius ſolutiones tum ſuam tum noſtram ipſi jam pridem commiſſam protinus ut ſpero in lucem emittet, quas ſi Geometræ ex penitiori quodam fonte petitas perſpexerint, nulli dubitamus quin anguſtos vulgaris

garis Geometriæ limites agnoſcant, noſtraque proin inventa tanto pluris faciant, quanto paúciores eximiam noſtram quæſtionem ſoluturi extiterint etiam inter illos ipſos qui per ſingulares quas tanto pluris faciant, quanto pauciores eximiam noſtram quæſtionem ſoluturi extiterint etiam inter illos ipſos qui per ſingulares quas tantopere commendant methodos, interioris Geometriæ latibula non ſolum intimè penetrâſſe, ſed etiam ejus pomœria 'Theorematis ſuis aureis, nemini ut putabant cognitis, ab aliis tamen jam longè priùs editis mirum in modum extendiſſe gloriantur.

Problema alterum purè Geometricum, quod priori ſubnectimus & ſtrenæ loco Eruditis proponimus.

Ab Euclidis tempore vel Tyronibus notum eſt; Ductam utcunque à puncto dato rectam lineam, à circuli peripheriâ ita ſecari ut rectangulum duorum ſegmentorum inter punctum datum & utramque peripheriæ partem interceptorum ſit eidem conſtanti perpetuo æquale. Primus ego oſtendi in eod, Actor. Jun. pag. 265. hanc proprietatem infinitis aliis curvis convenire, illamque adeo circulo non eſſe eſſentialem: Arrepta hinc occaſione, propoſui Geometris determinandam curvam vel curvas, in quibus non rectangulum ſed ſolidum ſub uno & quadrato alterius ſegmentorum æquetur ſemper eidem; ſed à nemine hactenus ſolvendi modus prodiit; exhibebimus eum quandocunque deſiderabitur: Quoniam autem non niſi per curvas tranſcendentes quæſito ſatisfacimus, en aliud cujus ſolutio per merè algebricas in noſtra eſt poteſtate.

Quæritur

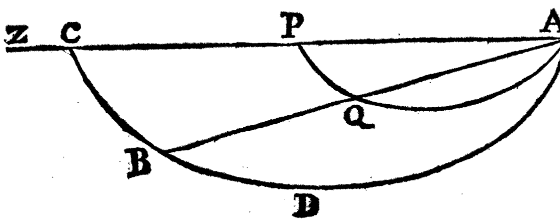
Quæritur Curva, ejus proprietatis, ut duo illa ſegmenta ad quamcunque potentiam datam elevata & ſimul ſumta faciant ubique unam eandemque ſummam.

Caſum ſimpliciſſimum exiſtente ſc. numero potentiæ 1. ibidem in actis pag. 266. jam ſolutum dedimus, generalem verò ſolutionem quam etiamnum premimus, Analyſtis eruendam relinquimus.

Dabam Groningæ ipſis Cal. Jan. 1697.

Hactenus Bernoullus. Problematum verò ſolutiones ſunt hujuſmodi.

Probl. I.



Inveſtiganda eſt curva Linea A D B in qua grave à dato quovis puncto A ad datum quodvis punctum B vi gravitatis ſuæ citiſſimè deſcendet.

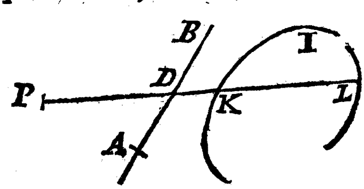
Solutio.

A dato puncto A ducatur recta infinita A P C Z horizonti parallela & ſuper eadem recta deſcribatur tum Cyclois quæcunque A Q P rectæ A B (ductæ & ſi opus eſt productæ) occurrens in puncto Q, tum Cyclois alia A B C cujus baſis & altitudo ſit ad prioris baſem & altitudinem reſpectivè ut A B ad A Q. Et hæc Cyclois noviſſima tranſibit per punctum B & erit Curva illa linea in qua grave à puncto A ad punctum B vi gravitatis ſuæ citiſſime perveniet. Q E I.

Prob.

Probl. II.

Problema alterum, si recte intellexi, (nam quæ in Actis Lips. ab Auctore citantur ad id spectantia nondum vidi) sic proponi potest. Quæritur Curva K I L ea lege ut si recta P K L à dato quodam puncto P, ceu Polo utcunque ducatur, & eidem Curvæ in punctis duobus K & L occurrat, potestates duorum ejus segmentorum P K & P L â dato illo puncto P ad occursus illos ductorum, si sint æque altæ (id est vel quadrata, vel cubi vel qua=drato-quadrata &c.) datam summam $PKq + PLq$ vel $PK^{cub} + PL^{cub}$, *&c.* (in omni recte illius positione) conficiant.



Solutio.

Per datum quodvis punctum A ducatur recta quævis infinita positione data A D B recte mobili P K L occurrens in D, & nominentur AD x & PR vel PL y, sintque Q & R quantitates ex quantitatibus quibuscunque datis & quantitate x quomodocunque constantes & relatio inter x & y definiatur per hanc æquationem $YY + QY + R = o$. Et si R sit quantitas data, Rectangulum sub segmentis P K & P L dabitur. Si Q sit quantitas data summa segmentorum illorum (sub signis propriis conjunctorum) dabitur. Si $QQ - 2R$ datur, summa quadratorum ($PKq + PLq$) dabitur. Si $Q^3 - 3QR$ data sit quantitas, summa cuborum ($PK^{cub} + PL^{cub}$) dabitur. Si $Q^4 - 4QQR + 2RR$ data sit quantitas, summa quadrato—quadratorum ($PKqq + PLqq$) dabitur. Et sic deinceps in infinitum. Efficiatur itaque ut $R, Q, QQ - 2R, Q^3 - 3QR$, *&c.* datæ sint quantitates & problema solvetur. Q. E. F.

Ad eundem modum Curvæ inveniri possunt quæ tria vel plura abscindent segmenta similes proprietates habentia. Sit æquatio $Y^3 + Qyy + Ry + S = o$ ubi Q, R & S quantitates significant ex quantitatibus quibuscunque datis & quantate x utcunque constantes; & Curva abscindet segmenta tria. Et si S data sit quantitas contentum solidum illorum trium dabitur. Si Q sit quantitas data, summa trium illorum dabitur. Si $QQ - 2R$ sit data quantitas, summa quadratorum ex tribus illis dabitur.